

نشریه علمی پدافند غیرعامل

سال سیزدهم، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱، (پیاپی ۴۹): صص ۴۶-۳۳

علمی - پژوهشی

## بررسی تحلیلی و عددی نفوذ پرتابه با دماغه دوپله در اهداف بتنی و با در نظر گرفتن اصطکاک

ابوذر ملکیان<sup>۱\*</sup>، خداداد واحدی<sup>۲</sup>، علیرضا نداف اسکویی<sup>۳</sup>، روح اله حسینی<sup>۴</sup>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۹

### چکیده

در این مطالعه، نفوذ پرتابه جنبشی با دماغه دوپله در اهداف بتنی با در نظر گرفتن تأثیر سرعت بر پدیده اصطکاک میان پرتابه و هدف بررسی شده است. جهت محاسبه عمق نفوذ، از روش‌های حل عددی و حل المان محدود شده استفاده شده است. در روش حل عددی با انتگرال‌گیری از تنش در سطح دماغه و محاسبه نیروی وارد بر دماغه پرتابه در حال نفوذ، عمق نفوذ پرتابه با استفاده از قانون دوم نیوتن و استفاده از روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل حاصل محاسبه شده است. در روش المان محدود از مدل ساختاری Concrete Damaged Plasticity جهت مدل کردن رفتار بتن و در هر دو روش المان محدود و روش حل عددی از مدل کاهش‌نمایی استاتیکی-دینامیکی جهت مدل کردن نیروی اصطکاک وارد بر پرتابه استفاده شده است. جهت مقایسه بازدهی مدل عمق نفوذ استفاده شده در مطالعه، عمق نفوذ چند نوع دماغه اجایو با کالیبرهای مختلف با استفاده از مدل مذکور در ضرایب اصطکاک ثابت و نمایی محاسبه و با داده‌های آزمایشگاهی موجود مقایسه شده است. عمق نفوذ محاسبه شده با استفاده از ضریب اصطکاک نمایی تطابق بهتری نسبت به حالت استفاده از ضرایب اصطکاک ثابت در یک طیف گسترده سرعت دارد. در این مطالعه همچنین، عمق نفوذ دماغه‌های بهینه‌سازی شده در مطالعات پیشین و دماغه اجایو با کالیبر شعاع سر ۳ با عمق نفوذ دماغه دوپله با استفاده از حل المان محدود مقایسه گشته است. در نظر گرفتن تأثیر سرعت بر ضریب اصطکاک میان پرتابه و هدف، باعث افزایش قابل توجه دقت محاسبات سرعت در پژوهش حاضر شده است.

**کلید واژه‌ها:** عمق نفوذ، اهداف بتنی، روش المان محدود، دماغه دوپله، اصطکاک

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین<sup>(ع)</sup>، تهران، ایران - (pishro1404@chmail.ir) - نویسنده مسئول

<sup>۲</sup> استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین<sup>(ع)</sup>، تهران، ایران

<sup>۳</sup> دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین<sup>(ع)</sup>، تهران، ایران

<sup>۴</sup> استادیار، مهندسی مکانیک دانشگاه جامع امام حسین<sup>(ع)</sup>، تهران، ایران

## ۱- مقدمه

مدل کردن صحیح اصطکاک میان پرتابه و هدف، یکی از مهم‌ترین عوامل تأثیرگذار در محاسبه صحیح عمق نفوذ در برخورد پرتابه با اهداف بتنی می‌باشد. در بسیاری از مطالعات، به علت پیچیدگی پدیده اصطکاک میان پرتابه و هدف بتنی، از اصطکاک صرف نظر شده است و یا با فرض ضریب اصطکاک ثابت سعی شده است نیروی اصطکاک میان پرتابه و هدف تقریب زده شود. نیروی اصطکاک میان پرتابه و هدف، به موارد بسیاری از جمله سرعت پرتابه در آن لحظه و شکل دماغه پرتابه (به علت تأثیرگذاری بر سرعت ساییش میان پرتابه و هدف در نقاط مختلف دماغه) بستگی دارد و استفاده از ضریب اصطکاک ثابت نمی‌تواند مدل مناسبی جهت تقریب زدن نیروی اصطکاک میان پرتابه و هدف باشد.

در این پژوهش ابتدا پس از بیان پیشینه تحقیقات صورت گرفته توسط دیگر محققین به بیان معادلات اصلی حاکم بر نفوذ پرتابه با شکل دماغه دو پله پرداخته شده است. در ادامه استخراج روابط تحلیلی و بررسی تأثیر اصطکاک در معادلات تحلیلی بیان شده است. با استخراج معادله عمق نفوذ، حل معادله انجام شده است. در ادامه پژوهش به کمک حل المان محدود و نتایج دیگر محققان، نتایج حل تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است.

### ۱-۱- پیشینه تحقیق، خلأهای موجود و نوآوری پژوهش حاضر

فرستال [۱] نشان داد که ضریب اصطکاک ثابت مناسب جهت مدل کردن نیروی اصطکاک میان پرتابه صلب و هدف بتنی، به شکل دماغه پرتابه بستگی دارد. ژنگ و همکاران [۲]، مدل جدیدی بر اساس ضریب اصطکاک ثابت برای محاسبه عمق نفوذ پرتابه در اهداف بتنی ارائه کردند و با استفاده از آن، عمق نفوذ پرتابه اجیو در اهداف بتنی را در ضرایب اصطکاک ثابت مختلف محاسبه و با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه کردند. هنگ و همکاران عمق نفوذ پرتابه‌هایی با سطح مقطع دایره‌ای و بیضوی را با استفاده از روش‌های المان محدود محاسبه و با داده‌های تجربی محاسبه کرده است. در معادلات ذکر شده در این مرجع، نیروی اصطکاک با انتگرال گیری از حاصل ضرب تنش عمودی در ضریب اصطکاک  $\mu$  محاسبه شده است. عمق نفوذ پرتابه با دماغه اجیو را با استفاده از حل عددی و در نظر گرفتن ضریب اصطکاک ثابت برابر با  $\mu = 0/03$  محاسبه و با نتایج آزمایشگاهی و نتایج حاصل از تئوری‌های سایر محققین مقایسه گشت. لو و همکاران [۳]، عمق نفوذ پرتابه با دماغه اجیو را با در نظر گرفتن ضرایب اصطکاک مختلف و استفاده از روش‌های المان محدود محاسبه و با آزمایش‌های انجام شده در سرعت‌های برخورد در

بازه‌ی  $2117 \text{ m/s}$  و  $3086 \text{ m/s}$  مقایسه کردند. ژنگ و همکاران [۴] عمق نفوذ پرتابه با دماغه اجیو را با استفاده از روش‌های حل عددی و انجام آزمایش در اهداف ساخته شده از بتن مسلح به‌دست آوردند. در این مرجع المان نیروی اصطکاک از حاصل ضرب ضریب اصطکاک در تنش عمودی وارد بر پرتابه به‌دست آمده است. لانگکوپ و فورستال [۵] مدل پیش‌بینی عمق نفوذ پرتابه با دماغه کروی را با استفاده از تئوری انبساط کروی در هدف فلزی ارائه کردند. فورستال و تزو [۶] مدل انبساط کروی هدف در حالت‌های تراکم ناپذیر و تراکم پذیر و در انواع پاسخ‌های ماده پلاستیک-الاستیک و پلاستیک-ترک خورده-الاستیک، مطالعه کردند. در این با برآزش منحنی بی‌بعد تنش در سطح دماغه بر حسب سرعت انبساط، معادله‌ای درجه دو برای پیش‌بینی تنش در سطح دماغه پرتابه در حال نفوذ، به‌دست آمده است. سپس با استفاده از این معادله و قانون دوم نیوتن عمق نفوذ پرتابه در اهداف بتنی پیش‌بینی شده است که توافق خوبی با داده‌های تجربی دارد. فورستال و لوک [۷]، مدل انبساط کروی ماده را در پیش‌بینی عمق نفوذ پرتابه در اهداف از جنس خاک به‌کار بردند و نتایج را با داده‌های تجربی مقایسه کردند و توافق خوبی را میان داده‌های تجربی و تحلیلی مشاهده کردند. فورستال و همکاران [۸]، نیروی وارد بر سطح دماغه پرتابه اجیو در حال نفوذ را به‌صورت‌صورت تابعی بر حسب ثابتی بی‌بعد در نظر گرفتند سپس با استفاده از این معادله و قانون دوم نیوتن مدل پیش‌بینی عمق نفوذ را به‌دست آوردند و با استفاده از داده‌های تجربی عمق نفوذ و مقایسه با مدل ارائه شده، ثابت بی‌بعد را که به مقاومت هدف و کالیبر پرتابه وابسته است، به‌دست آوردند. چن [۹]، با استفاده از تئوری انبساط ماده کروی و صرف نظر از نیروی اصطکاک، مدلی برای پیش‌بینی عمق نفوذ انواع دماغه در هدف آلومینیومی ارائه کرد. مقایسه مدل ارائه شده با داده‌های تجربی توافق خوبی را نشان می‌دهد. گومز و شوکلا [۱۰] با استفاده از ثابت بی‌بعد ارائه شده توسط فورستال و در نظر گرفتن تأثیر ناحیه حفره اولیه، مدل پیش‌بینی عمق نفوذ را ارائه کردند و مقایسه مدل ارائه شده ایشان و داده‌های آزمایشگاهی دقت خوب مدل ارائه شده را نشان می‌دهد. فورستال و همکاران [۱۱]، با در نظر گرفتن تقارن استوانه‌ای انبساط هدف<sup>۱</sup> نیروی وارد بر پرتابه با دماغه مخروطی که در هدف از جنس سنگ، نفوذ می‌کند را با استفاده از تحلیل عددی به‌دست آوردند. لای و چن [۱۲] با الهام گرفتن از فرستال، ثابتی بی‌بعد تجربی برای مقاومت هدف در برابر نفوذ ارائه کردند و مدل ارائه شده آن‌ها توافق خوبی با داده‌های تجربی دارد. لوک و همکاران [۱۳] مدل تنش به وجود آمده در هدف در اثر نفوذ را با استفاده از تقارن کروی به‌دست آوردند. در این مطالعه سخت‌گردانی کرنشی نیز در نظر گرفته شده است.

<sup>۱</sup> Cylindrical Cavity Expansion

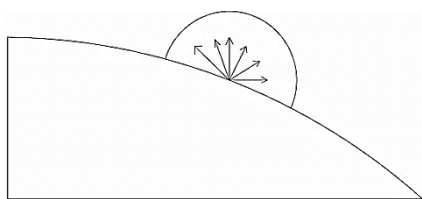
ضریب پواسون هدف بستگی دارند. وارن و فورستال [۱۸] با در نظر گرفتن تأثیر کرنش سختی و استفاده از تئوری انبساط کروی ماده معادله‌ای مشابه معادله (۳) برای تنش در سطح دماغه کروی پرتابه در حال نفوذ در هدف آلومینیومی، ارائه کردند. با به دست آوردن مقادیر A، B و C نیروی وارد بر دماغه و در نتیجه عمق نفوذ، برای هندسه‌های مختلف دماغه قابل محاسبه هستند. فورستال و تزو در مرجع [۶] مقادیر تنش در سطح دماغه را با استفاده از حل عددی معادلات دیفرانسیل حاصل از تئوری انبساط کروی ماده، در حالت‌های مختلف پلاستیک-ترک خورده-الاستیک و پلاستیک-الاستیک و ماده با خواص تراکم ناپذیر و تراکم پذیر برای هدف بتنی محاسبه و سپس با برازش این اطلاعات با استفاده از معادله (۳) مقادیر مشخصه‌های A، B و C را محاسبه کرده است. نیروی اصطکاک در پدیده نفوذ، بسیار پیچیده است و در نظر گرفتن ضریب اصطکاک ثابت برای این پدیده تنها به منظور تقریب زدن تأثیر نیروی اصطکاک و وارد کردن تأثیر این نیرو در مدل‌های پیش‌بینی عمق نفوذ می‌باشد. میزان این ضریب از مقایسه نتایج مدل، با داده‌های تجربی محاسبه می‌شود. سپس مدل ارائه شده می‌تواند در یک کالیبر خاص و در یک طیف سرعت مشخص، برای طیف گسترده‌ای از سایر پارامترهای تأثیرگذار در مسئله مورد استفاده قرار گیرد. فورستال و همکاران [۱] با استفاده از تئوری‌های انبساط کروی و استوانه‌ای و فرض ضریب اصطکاک ثابت، عمق نفوذ پرتابه‌هایی با دماغه‌های اجابو، کروی و مخروطی را محاسبه کرده است. با مقایسه نتایج محاسبات با داده‌های آزمایشگاهی مشاهده می‌شود که دماغه مخروطی در حالت استفاده از تئوری انبساط کروی ماده و ضریب اصطکاک ۰/۱، دماغه کروی در حالت ضریب اصطکاک ۰/۱ (از تئوری انبساط با تقارن کروی در پرتابه با دماغه کروی استفاده شده است. تئوری انبساط استوانه‌ای در مواردی با دماغه تیز کاربرد بهتری دارد) و در پرتابه با دماغه اجابو در حالت استفاده از تئوری انبساط با تقارن کروی و ضریب اصطکاک ۰/۲ توافق بهتری نسبت به سایر نتایج دارند. در مطالعه حاضر، با استفاده از معادله (۳) و فرض ضریب اصطکاک جنبشی ثابت نیروی محوری وارد بر دماغه با استفاده از انتگرال‌گیری محاسبه و سپس با استفاده از قانون دوم نیوتن و حل عددی معادله دیفرانسیل حاصل، عمق نفوذ عمق نفوذ پرتابه در هدف محاسبه می‌شود. در هدف بتنی، ناحیه حفره‌ای نیز در نظر گرفته می‌شود.

امروزه به کارگیری عملی دماغه‌های دو پله جهت نفوذ در اهداف بتنی امری رایج است. اما معادله‌ای برای پیش‌بینی عمق نفوذ این پرتابه‌ها وجود ندارد. دماغه دوپله در نظر گرفته شده دارای نوکی تخت تا مخروطی (با نظر کاربر) بوده و در پله دوم به صورت اجابو می‌باشد. در این مطالعه معادلات نفوذ این دماغه استخراج شده است.

در بسیاری از مطالعات صورت گرفته در زمینه نفوذ، پس از محاسبات مشاهده می‌شود که می‌توان تنش وارد بر دماغه را به صورت معادله‌ای درجه دو بر حسب سرعت انبساط ماده نوشت. فورستال و همکاران [۱۴] مدلی برای پیش‌بینی نیروی وارد بر دماغه پرتابه با دماغه کروی و عمق نفوذ آن با در نظر گرفتن کرنش سختی ارائه کردند. مدل انبساط استفاده شده توسط آن‌ها انبساط با تقارن کروی می‌باشد. در این مطالعه می‌توان به راحتی تنش ایجاد شده در سطح دماغه را به صورت معادله‌ای درجه دو با دو ترم نوشت (معادله ۵)، فورستال و همکاران [۱۵] با در نظر گرفتن خاصیت الاستیک-پلاستیک ایده‌آل و استفاده از تقارن کروی تنش ایجاد شده در سطح دماغه نفوذگر کروی در هدف، عمق نفوذ پرتابه را محاسبه کردند. در این مطالعه نیز مشاهده می‌شود که معادله به دست آمده برای تنش در سطح دماغه را می‌توان به راحتی به صورت معادله‌ای درجه دو بر حسب سرعت انبساط ماده نوشت. لوک و فورستال [۱۶] با استفاده از تئوری انبساط کروی ماده، مدلی برای پیش‌بینی عمق نفوذ پرتابه‌هایی با دماغه‌های کروی و اجابو در هدف بتن مسلح ارائه کردند. در این مطالعه فرض می‌شود تقویت کننده‌ها تنها نقش جلوگیری از رشد ترک در بتن را دارند و بر سایر خواص بتن تأثیر نمی‌گذارند؛ بنابراین مدل ایشان در حالت پلاستیک-الاستیک بررسی شده است. در این مطالعه تنش به صورت معادله‌ای درجه دو بر حسب سرعت، محاسبه و پارامترهای مادی A و B موجود در معادله (۵) در حالت پلاستیک-الاستیک و فرض تراکم ناپذیری برای ناحیه الاستیک محاسبه شده‌اند. جونز [۱۷] با در نظر گرفتن تنش در سطح دماغه پرتابه به صورت معادله (۵) معادله‌ای برای پیش‌بینی عمق نفوذ که قابل استفاده در شکل‌های مختلف دماغه پرتابه است را ارائه کرد. در معادله ارائه شده، اصطکاک نیز به صورت ضریبی ثابت در نظر گرفته شده است. سپس با هدف قرار دادن عمق نفوذ و با استفاده از روش‌های عددی بهینه‌سازی بهینه‌ترین دماغه جهت نفوذ حداکثری محاسبه شده است. فورستال و تزو [۶] تنش در سطح دماغه را برای انواع مختلف پاسخ ماده به انبساط از قبیل پلاستیک-الاستیک و پلاستیک-ترک خورده-الاستیک و ماده با فرض تراکم ناپذیر و تراکم پذیر محاسبه کردند. آن‌ها همچنین در این مقاله، با برازش داده‌های حاصل از تحلیل، معادله‌ای درجه دو برای تنش در سطح دماغه پرتابه در حال نفوذ در هدف بتنی که شامل سه ترم می‌باشد ارائه کردند. در معادله (۷) مقادیر A، B و C، مشخصه‌های مادی هستند که به مواردی همچون نوع تئوری انبساط استفاده شده از قبیل تراکم پذیر یا تراکم ناپذیر در نظر گرفتن ماده هدف، نوع تقسیم انبساط ماده (الاستیک-پلاستیک، الاستیک-ترک خورده پلاستیک یا پلاستیک-ترک خورده-صلب) و تئوری انبساط استفاده شده (تقارن کروی یا استوانه‌ای) و پارامترهای مادی از قبیل چگالی هدف، مقاومت فشاری تک محوره هدف بتنی و

## ۲-۱-۲- تقارن کروی

در تئوری انبساط ماده با تقارن کروی، فرض می‌شود ماده در جهت شعاع کره‌ای که مرکز آن بر سطح دماغه قرار دارد گشوده می‌شود. طوری که شعاع ( $r=0$ )، مرز میان دماغه و ماده را مشخص می‌کند. ماده در حال انبساط تنها در جهت شعاع این نیم‌کره دارای حرکت است و جابه‌جایی‌ها در سایر جهتها ناچیز فرض می‌شود. این فرض ساده کننده برای هر نقطه دماغه در نظر گرفته می‌شود. تئوری انبساط کروی در مطالعات نفوذ پرتابه کاربرد بسیار بیشتری نسبت به تئوری انبساط استوانه‌ای پرتابه دارد و در انواع بیشتری از دماغه‌ها مانند دماغه‌های اجابو و کروی و حتی دماغه‌های مخروطی قابل استفاده است. در شکل (۲) نحوه در نظر گرفتن فرض تقارن کروی در نقطه‌ای دلخواه از دماغه، به صورت شماتیک نمایش داده شده است. تمامی پاسخ‌های انبساط ماده از قبیل پلاستیک الاستیک، پلاستیک-ترک-خورده-الاستیک و پلاستیک-ترک خورده-صلب، در این تئوری نیز، قابل فرض است.



شکل (۲): تئوری انبساط با تقارن کروی

شرایط مرزی معادله (۵) در مرز مشترک قسمت‌های تابع مولد دماغه و در ابتدا و انتهای دماغه برقرار می‌باشند.

## ۲-۲- فرض‌های پذیرفته شده در حالت انبساط با تقارن کروی

با پذیرفتن فرض انبساط ماده به صورت تقارن کروی، شرایط زیر بر مسئله حاکم خواهد شد:

$$V = V_{imp} \cos(\alpha) \quad (1)$$

که در آن،  $V_{imp}$  سرعت برخورد و  $\alpha$  زاویه میان بردار عمود بر سطح دماغه و بردار سرعت پرتابه است.

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\phi} \quad (2)$$

که در آن،  $\sigma_{\theta}$  و  $\sigma_{\phi}$  تنش‌های محیطی هستند که با در نظر گرفتن تقارن کروی برابر خواهند بود.

## ۲-۳- حالت‌های تراکم پذیری ماده

در مطالعات نفوذ، یکی حالت‌های زیر برای حالت تراکم ماده در نظر گرفته می‌شود.

- در نظر گرفتن ماده هدف به صورت تراکم ناپذیر
- در نظر گرفتن ماده هدف به صورت تراکم پذیر
- در نظر گرفتن ماده هدف با خاصیت کرنش حجمی قفل شده

علاوه بر این نوآوری در نظر گرفتن تأثیر اصطکاک که در موضوع نفوذ پرتابه در اهداف بتنی پدیده‌ای پیچیده است، همواره معضل مطالعات بوده است. در این پژوهش با مدل کردن نیروی اصطکاک به صورت استاتیکی-جنبشی با کاهش نمایی<sup>۱</sup> عمق نفوذ پرتابه صلب در اهداف بتنی با استفاده از محاسبه عددی و شبیه‌سازی المان محدود محاسبه شده‌اند. در این روش تأثیر سرعت بر کاهش ضریب اصطکاک میان پرتابه و هدف در نظر گرفته می‌شود. در روش حل عددی با انتگرال‌گیری از تنش در سطح دماغه و محاسبه نیروی وارد بر دماغه پرتابه در حال نفوذ، عمق نفوذ پرتابه با استفاده از قانون دوم نیوتن و استفاده از روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل حاصل محاسبه شده است.

## ۲- روش حل

### ۲-۱- تئوری‌های انبساط ماده

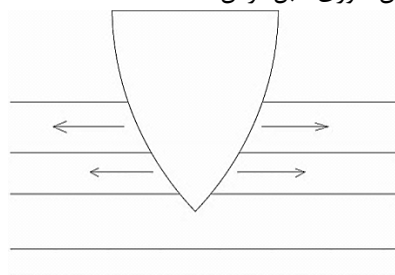
در مطالعات تحلیلی نفوذ پرتابه در اهداف مختلف، دو تئوری تقارن اصلی استفاده می‌شوند.

- انبساط ماده با تقارن کروی؛
- انبساط ماده با تقارن استوانه‌ای.

تئوری‌های تقارن در مطالعات نفوذ برای ساده‌تر شدن حل مسئله به کار می‌روند. با در نظر گرفتن تئوری‌های انبساط با تقارن استوانه‌ای و تقارن کروی، حل مسئله از حالت سه بعدی به حالت یک بعدی تبدیل می‌شود.

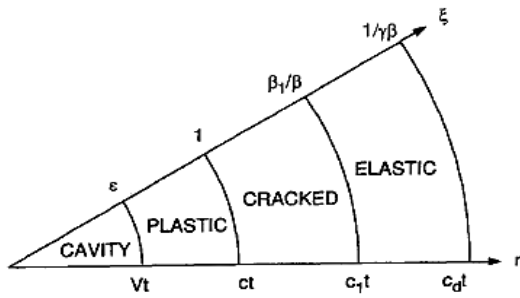
### ۲-۱-۱- تقارن استوانه‌ای

در تئوری انبساط ماده با تقارن استوانه‌ای مطابق شکل (۱)، فرض می‌شود که ماده به صورت لایه‌های مجزا از هم که هر لایه تأثیری بر لایه‌های دیگر نمی‌گذارد در راستای شعاعی ( $R$ ) استوانه‌ای که محور آن موازی با محور پرتابه می‌باشد، گشوده می‌شود. جابه‌جایی لایه‌ها در راستای محور پرتابه ( $z$ ) ناچیز فرض می‌شود. تمامی پاسخ‌های انبساط ماده از قبیل پلاستیک-الاستیک، پلاستیک-ترک-خورده-الاستیک و پلاستیک-ترک خورده-صلب، در این تئوری قابل فرض است.



شکل (۱): تئوری انبساط با تقارن استوانه‌ای

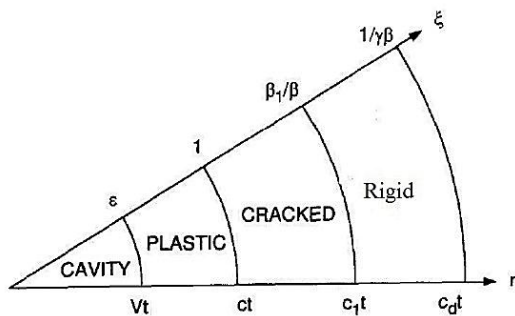
<sup>1</sup> Static Kinematic Exponential Decay



(b)

شکل (۴): روش تقسیم‌بندی ناحیه در حال انبساط به سه ناحیه پلاستیک-ترک خورده-الاستیک [۶]

در حالت پاسخ پلاستیک-ترک خورده-صلب، ناحیه پلاستیک از شعاع  $r = vt$  شروع می‌شود و تا شعاع  $r = ct$  ادامه می‌یابد. ناحیه ترک‌دار از شعاع  $r = ct$  شروع می‌شود و تا شعاع  $r = ct_1 t$  ادامه می‌یابد و ناحیه صلب از شعاع  $r = ct_1$  شروع شده و تا شعاع  $r = ct_2 t$  ادامه می‌یابد.



شکل (۵): روش تقسیم‌بندی ناحیه در حال انبساط به سه ناحیه پلاستیک-ترک خورده-صلب [۲۰]

تنش در سطح دماغه پرتابه را می‌توان به صورت معادله‌ای درجه دو بر حسب سرعت پرتابه (معادله (۵)) بیان کرد.

$$S(r=0) = A + Bv^2 \quad (5)$$

در معادله (۵)،  $S$  تنش بی‌بعد شعاعی می‌باشد و به صورت معادله (۶) محاسبه می‌شود. محل برخورد دماغه پرتابه با هدف می‌باشد. این معادله توسط محققانی از قبیل جونز و همکاران [۱۷]، فورستال و همکاران [۱۵] و لوک و فورستال [۱۶] جهت محاسبه عمق نفوذ پرتابه در اهداف بتنی مورد استفاده قرار گرفته است.

$$S = \frac{\sigma_r}{Y} \quad (6)$$

در معادله (۶)،  $Y$  مقاومت فشاری تک محوره بتن می‌باشد.

$$\sigma_n = AY + BY \left( \frac{V}{(Y/\rho_0)^{1/2}} \right) + CY \left( \frac{V}{(Y/\rho_0)^{1/2}} \right)^2 \quad (7)$$

برای یک هدف تراکم ناپذیر و در ناحیه پلاستیک، معادلات بقای جرم و مومنوم در مختصات اولبری به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = -\rho_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (4)$$

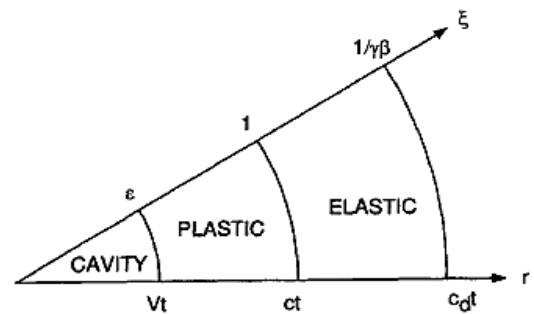
که در آن،  $\rho_0$  چگالی اولیه هدف  $v$  سرعت موضعی (سرعت موضعی ذرات ماده در ناحیه موردنظر) که در جهت بیرون مثبت در نظر گرفته می‌شود.  $\sigma_r$  تنش شعاعی و  $\sigma_\theta$  تنش محیطی می‌باشد که در حالت فشاری مثبت در نظر گرفته می‌شوند.

#### ۴-۲- حالت انبساط ماده

حالت‌های انبساط زیر برای مدل کردن پاسخ ماده هدف به نفوذ مورد استفاده قرار می‌گیرند:

- پلاستیک-الاستیک - شکل (۳)؛
- پلاستیک-ترک خورده-الاستیک - شکل (۴)؛
- پلاستیک-ترک خورده-صلب - شکل (۵).

در حالت پاسخ پلاستیک-الاستیک، ناحیه پلاستیک از شعاع  $r = vt$  شروع می‌شود و تا شعاع  $r = ct$  ادامه می‌یابد؛ و ناحیه الاستیک از شعاع  $r = ct$  شروع شده و تا شعاع  $r = ct_2 t$  ادامه می‌یابد.



(a)

شکل (۳): روش تقسیم‌بندی ناحیه در حال انبساط به

دو ناحیه پلاستیک-الاستیک [۱۹]

در حالت پاسخ پلاستیک-ترک خورده-الاستیک، ناحیه پلاستیک از شعاع  $r = vt$  شروع می‌شود و تا شعاع  $r = ct$  ادامه می‌یابد. ناحیه ترک‌دار از شعاع  $r = ct$  شروع می‌شود و تا شعاع  $r = ct_1 t$  ادامه می‌یابد و ناحیه الاستیک از شعاع  $r = ct_1$  شروع شده و تا شعاع  $r = ct_2 t$  ادامه می‌یابد.

## ۲-۵- محاسبه سرعت پرتابه در انتهای ناحیه چاله‌ای

### ۲-۵-۱- ناحیه چاله‌ای

در اثر برخورد پرتابه با سطح آزاد هدف، ناحیه‌ای به وجود می‌آید که ناحیه چاله‌ای نامیده می‌شود. این ناحیه، طبق مشاهدات تجربی به عمل آمده، در انواع شکل دماغه حدود چهار برابر شعاع ساقه پرتابه طول خواهد داشت [۸]. در شکل (۶) ناحیه چاله‌ای قابل مشاهده است.

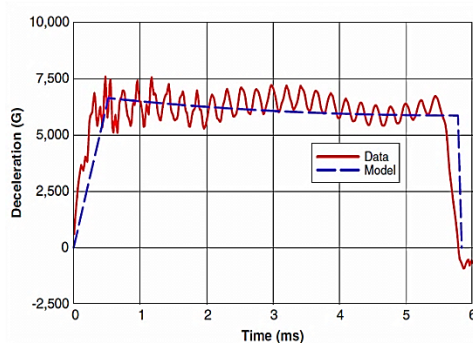


شکل (۶): ناحیه چاله‌ای به وجود آمده در آزمون برخورد [۲۱]

نیروی محوری وارد بر پرتابه در ناحیه چاله‌ای به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F_x = cx \quad (9)$$

در مرجع [۱۰] فرض شده است که در مرز میان ناحیه تونلی و ناحیه چاله‌ای جابه‌جایی، سرعت و نیرو پیوسته هستند که البته پیوستگی جابه‌جایی و سرعت بدیهی می‌باشند و فرض پیوستگی نیرو با توجه به نمودارهای شتاب-زمان به دست آمده از آزمایش در نظر گرفته می‌شود (شکل (۷)). توجه شود که منظور از پیوستگی به معنای مطلق ریاضی آن نیست بلکه هدف برابر قرار دادن نیرو در انتهای ناحیه چاله‌ای و ابتدای ناحیه تونلی می‌باشد که در نمودارهای شتاب-زمان مشاهده می‌شود که این فرض قابل قبول خواهد بود.



شکل (۷): نمودار شتاب زمان به دست آمده از آزمایش با استفاده از

شتاب‌سنج پیزوالکتریک [۲۱]

با توجه به مشاهدات تجربی شتاب-زمان، می‌توان نیروی وارد بر دماغه در ناحیه چاله‌ای را به صورت  $F_z = cz$  تقریب زد. با

در معادله (۷)،  $\rho_0$  چگالی هدف در لحظه اولیه و  $V$  سرعت انبساط ماده هدف می‌باشد. در مرجع [۶] مقادیر  $A$ ،  $B$  و  $C$  برای تئوری‌های مختلف انبساط محاسبه شده‌اند. مقادیر محاسبه شده در جدول (۱) نمایش داده شده است. این معادله، معادله تنش استفاده شده در مطالعه حاضر جهت محاسبه عمق نفوذ پرتابه می‌باشد.

نیروی وارد بر دماغه با انتگرال‌گیری از معادله (۷) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

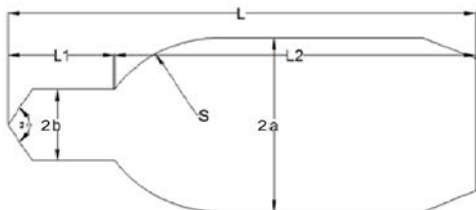
$$dF_n = \sigma_n(V) dA \quad (8)$$

در معادله فوق، با توجه به استفاده از تئوری تقارن کروی،  $\sigma_n$  همان  $\sigma_r$  می‌باشد و با برازش داده‌های حاصل از حل عددی در مرجع [۶] به صورت معادله (۷) محاسبه می‌شود. مقادیر  $A$ ،  $B$  و  $C$  در معادله (۷)، در جدول (۱) آورده شده است.

جدول (۱): داده‌های حاصل از برازش منحنی‌های تنش-سرعت [۶]

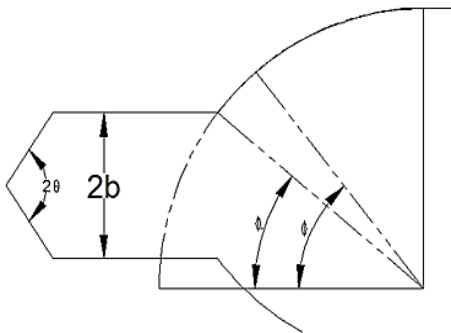
مدل	A	B	C
۱	۵/۱۸	۰	۳/۸۸
۲	۴/۰۵	۱/۳۶	۳/۵۱
۳	۴/۵۰	۰/۷۵	۱/۲۹
۴	۳/۴۵	۱/۶۰	۱/۱۲

در جدول (۱)، مدل ۱ مربوط به پلاستیک-الاستیک تراکم ناپذیر، مدل ۲ پلاستیک-ترک خورده-الاستیک تراکم ناپذیر، مدل ۳ پلاستیک-الاستیک تراکم پذیر و مدل ۴ پلاستیک-ترک خورده-الاستیک تراکم پذیر می‌باشد. به منظور محاسبه عمق نفوذ با استفاده از معادله (۷) و انتگرال‌گیری از تنش‌های شعاعی و مماسی وارد بر سطح دماغه با در نظر گرفتن ضریب اصطکاک نمایی، نیروی محوری وارد بر دماغه و با استفاده از قانون دوم نیوتن عمق نفوذ دماغه محاسبه می‌شود. فرستال، با استفاده از مقادیر موجود در جدول فوق و سپس انتگرال‌گیری از تنش محاسبه شده در سطح دماغه و استفاده از قانون دوم نیوتن، مدلی برای پیش‌بینی عمق نفوذ پرتابه با دماغه اجایو ارائه کرد. مدل شماره (۴) آورده شده در جدول (۱) از تطابق بالاتری نسبت به مدل‌های دیگر برخوردار است. در این مطالعه با توجه به اینکه نفوذ در اهداف بتنی غیر مسلح و سرعت برخورد متوسط در نظر گرفته شده است، از تئوری شماره (۴) جهت محاسبه تنش در سطح دماغه شده استفاده شده است. در این مطالعه، عمق نفوذ با در نظر گرفتن ناحیه چاله‌ای محاسبه شده است. به منظور محاسبه عمق نفوذ ابتدا سرعت پرتابه در انتهای ناحیه چاله‌ای و سپس عمق نفوذ با استفاده از نیروی محوری وارد بر پرتابه و قانون دوم نیوتن محاسبه می‌شود.



شکل (۸): دماغه دوپله استفاده شده در مطالعه حاضر

در شکل (۹)، زوایای  $\phi_0$  و  $\phi$  نمایش داده شده است. زاویه  $\phi$  از مقدار  $\phi_0$  آغاز و تا مقدار  $\pi/2$  که دماغه بر ساقه پرتابه مماس می‌شود ادامه می‌یابد.



شکل (۹): زاویه  $\phi$  به کار رفته در انتگرال محاسبه نیرو

با توجه به شکل (۹)، نیروی محوری وارد بر دماغه اجابو به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$F_{og} = 2\pi s^2 \int_{\phi_0}^{\pi/2} \{ \sigma_n [\sin(\theta) - ((s-a)/s)] \cos(\theta) \} + \mu \{ \sigma_n (\sin(\theta) - ((s-a)/s)) \sin(\theta) \} d\theta \quad (13)$$

در معادله (۱۳)  $\mu$  ضریب اصطکاک نامی در نظر گرفته شده میان دماغه پرتابه و هدف می‌باشد و  $\sigma_n$  تنش عمودی وارد بر دماغه است که در حالت فرض انبساط حفره با تقارن کروی، این تنش همان تنش شعاعی می‌باشد و با استفاده از معادله (۷) قابل محاسبه است.

$$\phi_0 = \sin^{-1} \left( \frac{s-a+b}{s} \right) \quad (14)$$

المان نیروی وارد بر دماغه مخروطی به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$dF_{z-Conv} = 2\pi \sigma_n [\tan(\theta)^2 + \mu \tan(\theta)] x dx \quad (15)$$

در دماغه مخروطی، سرعت انبساط ماده در نقاط مختلف دماغه در حال نفوذ و تنش عمودی در سطح دماغه یکسان می‌باشد. با انتگرال گیری از المان نیروی محوری وارد بر دماغه مخروطی نیروی محوری وارد بر این دماغه به دست می‌آید.

استفاده از قانون دوم نیوتن معادلات زیر به سادگی حاصل می‌شوند [۱۰]:

$$z = \left( \frac{V_{imp}}{\omega} \right) \sin(\omega t),$$

$$V_1 = \frac{dz}{dt} = V_{imp} \cos(\omega t), \quad (10)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\omega V_{imp} \sin(\omega t),$$

در معادلات فوق،  $\omega^2 = c/m$ ،  $V_{imp}$  سرعت برخورد پرتابه،  $V_1$  سرعت پرتابه در لحظه ورود به ناحیه تونلی و  $V_z$  سرعت پرتابه در هر لحظه می‌باشد. به منظور محاسبه  $V_1$  ابتدا نیروی وارد بر دماغه جلویی پرتابه را با استفاده از مقادیر موجود در جدول (۱) محاسبه می‌شود. برابر قرار دادن عمق ناحیه چاله‌ای با چهار برابر شعاعی ساقه دماغه جلویی پرتابه، سرعت  $V_1$  به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$4b = \left( \frac{V_{imp}}{\omega} \right) \sin(\omega t),$$

$$V_1 = \frac{dz}{dt} = V_{imp} \cos(\omega t), \quad (11)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\omega V_{imp} \sin(\omega t) = -F_{zs}$$

با حل دستگاه معادلات فوق، سرعت پرتابه در لحظه ورود به ناحیه تونلی حاصل می‌شود.

$$mV_z \frac{dV_z}{dx} = -F_{zs} \quad (12)$$

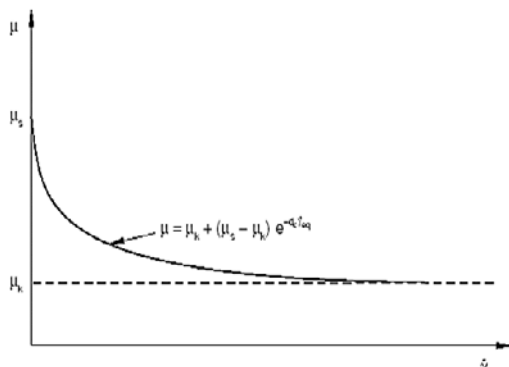
## ۲-۶- محاسبه سرعت پرتابه پس از نفوذ قسمت اول دماغه

فرض می‌شود به علت وجود ناحیه تونلی تا لحظه تمام شدن طول ساقه‌ی دوم و ورود کامل این ساقه به ناحیه تونلی، دماغه دوم با هدف برخورد نخواهد داشت. حال با داشتن سرعت  $V_1$  و استفاده از قانون دوم نیوتن، سرعت پرتابه در لحظه‌ای که قسمت اول دماغه به طور کامل در هدف نفوذ کرده است و در لحظه برخورد قسمت دوم دماغه به هدف به دست می‌آید.

## ۲-۷- محاسبه نیروی وارد بر دماغه در پله

در شکل (۸)، هندسه دماغه دوپله که بخش اول دماغه مخروطی و بخش دوم آن اجابو می‌باشد (دماغه مخروطی-اجابو)، نشان داده شده است. در این مطالعه  $L_1=8/6$  mm،  $L_2=37/5$  mm،  $S=21$  mm،  $a=3/5$  mm،  $b=1/5$  mm،  $L=46/1$  mm می‌باشد.

کردن نیروی اصطکاک در این مرجع شده استفاده شده است. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که مقدار اصطکاک میان الیاف تأثیر قابل توجهی بر مقاومت پارچه در برابر نفوذ پرتابه می‌گذارد. پنگ و همکاران [۲۹] تأثیر زبری سطح جاده را بر اصطکاک میان لاستیک خودرو و سطح جاده را بررسی کردند. در این مرجع، از روش المان محدود و مدل کاهش نمایی اصطکاک جهت مطالعه اصطکاک میان جاده و لاستیک خودرو شده استفاده شده است. چوی و همکاران [۳۰] جهت مطالعه تأثیر سرعت بر اصطکاک در تیوب‌های جاذب ضربه، از مدل کاهش نمایی اصطکاک و تحلیل المان محدود استفاده کرده‌اند. در این مرجع، جهت به‌دست آوردن پارامترهای مدل کاهش نمایی در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی از روش حداقل مربعات<sup>۲</sup> استفاده کرده‌اند. مقایسه نتایج تحلیل المان محدود و نتایج آزمایشگاهی انرژی جذب شده ضربه، نشان می‌دهد که روش حداقل مربعات در به‌دست آوردن پارامترهای مدل کاهش نمایی اصطکاک، در مورد تیوب جاذب انرژی کاربردی می‌باشد. در مطالعه حاضر نیز، جهت به‌دست آوردن عمق نفوذ انواع دماغه از مدل کاهش نمایی ضربه اصطکاک شده استفاده شده است. در این مدل با افزایش سرعت، ضربه اصطکاک میان دماغه و هدف به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. در شکل (۱۰) مدل ضربه اصطکاک مذکور نمایش داده شده است.



شکل (۱۰): ضربه اصطکاک استاتیک- جنبشی نمایی کاهش

با استفاده از قانون دوم نیوتن معادله دیفرانسیل (۱۹) جهت به‌دست آوردن سرعت در لحظه رسیدن بخش دوم دماغه به هدف حاصل می‌شود.

$$\frac{dV_z}{dx} = \frac{-F_1}{mV_z} \quad (19)$$

در معادله فوق،  $F_1$  نیروی وارد بر بخش اول دماغه می‌باشد. با قرار دادن شرایط اولیه  $V_0=V_1$  و حل عددی معادله دیفرانسیل (۱۹) و به‌دست آوردن سرعت در  $x=L_1$  سرعت پرتابه در لحظه رسیدن قسمت دوم دماغه به هدف ( $V_2$ )، به‌دست می‌آید.

$$F_{Conic} = 2\pi\sigma_n [\tan(\theta)^2 + \mu \tan(\theta)] \int_0^{b \cot(\theta)} x dx \quad (16)$$

$$= \pi\sigma_n [\tan(\theta)^2 + \mu \tan(\theta)] b^2 \cot^2 \theta$$

در معادله (۱۶)،  $b$  شعاع بخش اول دماغه (شکل ۸) می‌باشد.

المان نیروی وارد بر دماغه تخت به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$dF_{z-} = 2\pi r \sigma_n (v_z) dr \quad (17)$$

از جایی که سرعت انبساط ماده در تمامی نقاط دماغه تخت یکسان و برابر با سرعت نفوذ پرتابه می‌باشد، نیروی وارد بر بخش تخت دماغه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F_{z-} = \int_0^b 2\pi r \sigma_n (v_z) dr = \pi b^2 \sigma_n (v_z) \quad (18)$$

## ۲-۸- ضربه اصطکاک

اصطکاک در فرآیند نفوذ پرتابه در اهداف، پدیده‌ای بسیار پیچیده است و فرض ضربه اصطکاک ثابت تنها جهت اعمال اثر نیروی اصطکاک در این فرآیند در نظر گرفته می‌شود. ضربه اصطکاک ثابت در نظر گرفته شده در مطالعات تحلیلی عمق نفوذ همگی ضرابی تجربی هستند که با مقایسه داده‌های تجربی و داده‌های حاصل از مطالعات تئوری عمق نفوذ به‌دست آمده‌اند [۹]. فورستال و همکاران [۱، ۱۴، ۲۲ و ۲۳]، با مقایسه داده‌های تجربی و داده‌های حاصل از مدل‌های تئوری ضرایب اصطکاک ثابتی در بازه ۰/۰۲ تا ۰/۱ را جهت در نظر گرفته شدن تأثیر نیروی اصطکاک پیشنهاد کردند. در این مطالعه، جهت تحلیل عددی عمق نفوذ از ضربه اصطکاک ثابت و ضربه اصطکاک نمایی استفاده شده است. پارامترهای مربوط به مدل کاهش نمایی ضربه اصطکاک با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی عمق نفوذ [۲۴-۲۶] محاسبه شده‌اند.

## ۲-۹- مدل کاهش نمایی استاتیکی جنبشی

زیناسنی و همکاران [۲۷] تأثیر اصطکاک میان فولاد و بتن را بر مقاومت صفحه ساخته شده از بتن مسلح بررسی کردند. در این مرجع از ضرایب اصطکاک ثابت و ضرایب اصطکاک نمایی جهت اعمال نیروی اصطکاک شده استفاده شده است. مشاهده می‌شود که در حالت استفاده از ضربه اصطکاک نمایی نتایج بهتری نسبت به حالت استفاده از ضربه اصطکاک ثابت حاصل می‌شود. چو و همکاران [۲۸] با استفاده از روش‌های المان محدود، تأثیر ضربه اصطکاک بر مقاومت نفوذی (نفوذ در برابر پرتابه) پارچه‌های بافته شده از انواع مختلف الیاف از قبیل کولار<sup>۱</sup> و پلی‌اتیلن را بررسی کردند. از ضربه اصطکاک نمایی جهت مدل

<sup>۲</sup> Least Square

<sup>۱</sup> Kevlar



## ۲-۱۰- محاسبه عمق نفوذ نهایی

با حل معادله (۱۹) در فاصله  $z=L_1$ ، سرعت  $V_2$  محاسبه خواهد شد. سرعت پرتابه در لحظه برخورد قسمت دوم دماغه با هدف و  $L_1$  فاصله نوک دماغه با محل شروع قسمت دوم دماغه می‌باشد. پس از برخورد قسمت دوم دماغه با هدف با استفاده از قانون دوم نیوتن و جمع جبری نیروهای وارد بر بخش‌های اول و دوم دماغه، معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dV_z}{dx} = \frac{-(F_{zs} + F_{zo})}{mV_z} \quad (20)$$

یا

$$\frac{dx}{dV_z} = \frac{mV_z}{-(F_{zs} + F_{zo})} \quad (21)$$

در معادله فوق،  $F_{zo}$  و  $F_{zs}$  به ترتیب نیروی محوری وارد بر بخش‌های اول و دوم دماغه می‌باشند. با حل معادله دیفرانسیل (۲۱) در سرعت  $V_2$ ، عمق نفوذ پرتابه از لحظه برخورد دماغه دوم با هدف، تا لحظه توقف پرتابه محاسبه خواهد شد. در معادله (۲۱) شرط اولیه  $X_0=0$  در نظر گرفته می‌شود. به منظور محاسبه عمق نفوذ کلی پرتابه، این عمق نفوذ را با طول ناحیه چاله‌ای و طول ساقه دماغه دوم به صورت زیر جمع می‌شود:

$$P_0 = P_1 + P_2 \quad (22)$$

که در آن،  $P_0$  طول ناحیه چاله‌ای است که برابر است با  $4a$ ،  $P_1$  برابر است با  $L_2$  و  $P_2$  عمق نفوذ از لحظه برخورد دماغه دوم با هدف است که از حل معادله (۲۱) به دست می‌آید.

## ۲-۱۱- محاسبه عمق نفوذ با استفاده از روش‌های

### المان محدود

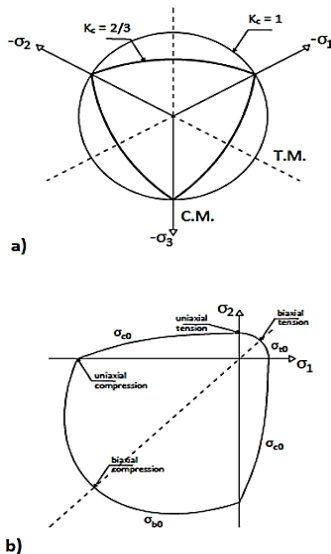
در این بخش جهت محاسبه عمق نفوذ پرتابه‌ها از روش‌های المان محدود (FEM) شده استفاده شده است. با توجه به تقارن محوری موجود در مسئله، از حل دو بعدی استفاده شده است. خواص بتن با استفاده از مدل<sup>۱</sup> CDP اعمال شده است و پرتابه صلب در نظر گرفته شده است. در شکل (۱۶)، پرتابه صلب در حال نفوذ در هدف بتنی نمایش داده شده است.

## ۲-۱۱-۱- مدل ساختاری استفاده شده در مدل سازی هدف

### بتنی

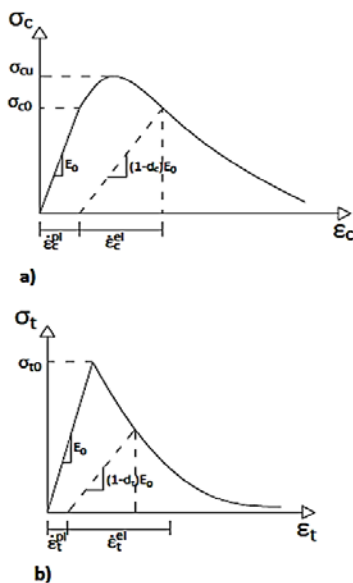
این مدل ساختاری استفاده شده در نرم‌افزار ABAQUS، عمدتاً برای تحلیل سازه‌های بتونی و سایر مواد شبه شکننده مورد

استفاده قرار می‌گیرد. سطوح تسلیم CDP در شکل (۱۱) نشان داده شده‌اند.



شکل (۱۱): سطوح تسلیم در مدل CDP تصویر a سطوح هشت وجهی<sup>۲</sup> و تصویر b سطوح تنش دو بعدی<sup>۳</sup>

CDP را می‌توان به عنوان معیار تغییر یافته Drucker-Prager با تغییر سطح خرابی دایره با شکلی تعریف شده با پارامتر kc معرفی کرد. این معیار توسط (J, 1989) بیان شد و برخی اصلاحات توسط (لی، ۱۹۹۸) در آن انجام شده است. منحنی تنش-کرنش بتن بر اساس مدل ساختاری CDP در شکل (۱۲) نشان داده شده است.



شکل (۱۲): نمودار تنش-کرنش، نمودار (a) تنش-کرنش تک محوره فشاری و نمودار (b) تنش کرنش تک محوره کششی

<sup>۲</sup> Deviatoric Plane  
<sup>۳</sup> Plane Stress Plane

<sup>۱</sup> Concrete Damage Plasticity

پرتابه به جز حرکت در راستای محور طولی محدود شده است.



شکل (۱۴): شرایط مرزی اعمال شده به پرتابه

در جدول (۲) مشخصات هندسی و خواص مادی هدف استفاده شده در تحلیل المان محدود عمق نفوذ ذکر شده است. قطر هدف به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که با توجه به مطالعات فرو و همکاران [۲۱] قطر هدف تأثیری بر داده‌های حاصل نداشته باشد. در مرجع [۲۱] با انجام مطالعات آزمایشگاهی نشان داده شده است که در نسبت قطر هدف به قطر پرتابه بزرگ‌تر از ۱۲ قطر هدف بر نتایج آزمایش‌های نفوذ تأثیرگذار نمی‌باشد. در این مطالعات جهت اطمینان از نسبت قطر هدف به قطر پرتابه بزرگ‌تر از ۲۵ استفاده شده است. المان مورد استفاده دو بعدی و دارای تقارن محوری، چهار ضلعی خطی و دارای چهار نود در هر المان می‌باشد.

جدول (۲): مشخصات هندسی و خواص مادی هدف استفاده شده در

تحلیل المان محدود عمق نفوذ

۱۸۰	قطر هدف (mm)
۷۰۰	طول هدف (mm)
۳۰	مقاومت فشاری (MPa)
۲۴۰۰	چگالی ( $\text{kg/m}^3$ )

در جدول (۳) مشخصات هندسی پرتابه‌ای استفاده شده در تحلیل المان محدود عمق نفوذ آورده شده است. همان‌طور که ذکر گردید، پرتابه استفاده شده در تحلیل صلب در نظر گرفته شده است.

جدول (۳): مشخصات هندسی پرتابه‌های استفاده شده در تحلیل

المان محدود عمق نفوذ

Two step	Ogive-3	نوع دماغه
۱۰	۱۰	جرم پرتابه (gr)
۷	۷	قطر پرتابه (mm)
۴۶/۱	۴۱	طول پرتابه (mm)

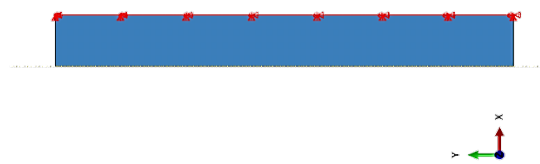
در شکل (۱۵)، پرتابه در هدف بتنی نمایش داده شده است. تصویر نمایش داده شده از دوران مدل دو بعدی استفاده شده در نرم‌افزار به دست آمده است. همان‌طور که ذکر گردید، با توجه به تقارن محوری حاکم بر مسئله از تحلیل المان محدود دو بعدی استفاده شده است.

در شکل (۱۲)، نمودار تنش-کرنش، نمودار  $a$  تنش-کرنش تک محوره فشاری و نمودار  $b$  تنش کرنش تک محوره کششی را نمایش می‌دهد.

در  $a$  مشاهده می‌شود که یک رژیم الاستیک اولیه وجود دارد که با یک خط مستقیم مطابق با مدول یانگ رفتار می‌کند. پس از تنش فشاری  $\sigma_{e0}$  رژیم پلاستیک شروع می‌شود تا اینکه به فشار استرس فشاری نهایی رسید و در نهایت، بتن نرم می‌شود. در  $b$  رفتار مشابه با  $a$  مشاهده می‌شود به استثنای اینکه تنش تسلیم برابر است با تنش کششی نهایی  $\sigma_{t0}$  و تا رسیدن به این تنش نهایی ناحیه پلاستیک آغاز نمی‌شود.

## ۲-۱۱-۲- شرایط مرزی اعمال شده به پرتابه و هدف

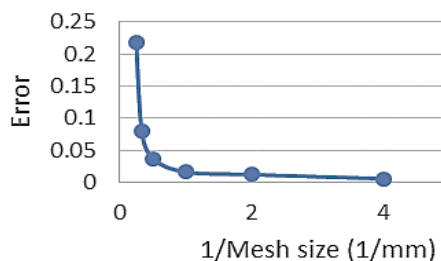
در شکل (۱۳) شرایط مرزی اعمال شده در سطح بیرونی هدف بتنی نمایش داده شده است. حرکت در تمامی جهات در مرز بیرونی هدف برابر با صفر در نظر گرفته شده است. با توجه به تقارن محوری مسئله، و ناچیز در نظر گرفتن جابه‌جایی در سطح جانبی هدف استوانه‌ای در جهت شعاعی، جابه‌جایی در این سطوح در تمامی جهات برابر با صفر خواهد بود. در آزمایش‌های برخورد استفاده شده در این مطالعه جهت مقایسه نتایج حل از روش‌های مختلف، اهداف بتنی به روش قالب‌گیری در قالب‌های استوانه‌ای فلزی تولید شده‌اند. نتایج مطالعات فرو و همکاران [۲۱] نشان می‌دهد که در نسبت‌های قطر هدف به قطر پرتابه بزرگ‌تر از ۲۵، افزایش قطر پرتابه تأثیری در نتایج آزمایش‌های عمق نفوذ نخواهد گذاشت. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در نسبت‌های بزرگ‌تر از مقدار ذکر شده، سطح بیرونی هدف قالب‌گیری شده در استوانه فلزی از برخورد تأثیر نمی‌پذیرد.



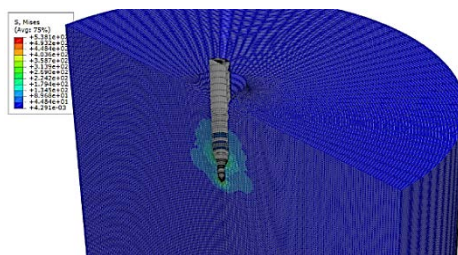
شکل (۱۳): شرایط مرزی اعمال شده به هدف بتنی

در شکل (۱۴) قیود اعمال شده به پرتابه صلب نمایش داده شده است. حرکت پرتابه در تمامی جهات به جز محور طولی پرتابه محدود شده است. با توجه به صلب در نظر گرفتن پرتابه، تمامی قیود به نقطه‌ای مرجع واقع در نوک پرتابه اعمال می‌شود. همان‌طور که ذکر شد، هندسه پرتابه و اهداف دارای تقارن محوری می‌باشند و شرایط مرزی و بارگذاری (برخورد) نیز دارای این نوع تقارن هستند، بنابراین مسئله به صورت تقارن محوری مدل شده است. با توجه به این مسئله، تمامی درجات آزادی

در معادله فوق،  $D_2$  مقدار محاسبه شده عمق نفوذ در المان با سایز مورد نظر و  $D_1$  مقدار محاسبه شده عمق نفوذ در المان استفاده شده در مرحله قبل می‌باشد.

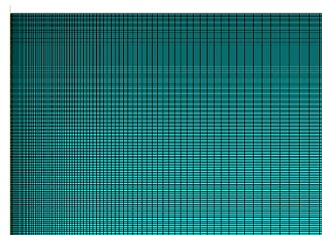


شکل (۱۵): حساسیت سنجی به اندازه المان بر حسب مقادیر نفوذ مربوط به دماغه دوپله در سرعت  $330 \text{ m/s}$



شکل (۱۶): نمای مش‌بندی هدف بتنی در حالت تقارن محوری

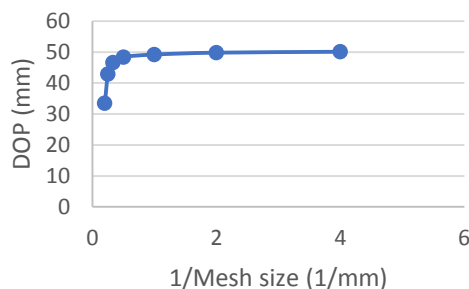
در شکل (۱۶) بخشی از مش‌بندی هدف بتنی نمایش داده شده است. طول کوچک‌ترین المان برابر با  $0.25 \text{ mm}$  در نظر گرفته شده است.



شکل (۱۷): حساسیت سنجی به اندازه المان

### ۳- نتایج محاسبات

در نمودار شکل (۱۹)، عمق نفوذ به‌دست آمده از مدل با در نظر گرفتن ضرایب اصطکاک  $0.1$ ،  $0.2$ ،  $0.5$  و  $1$  و مدل اصطکاک کاهش نمایی مقایسه گشته است. داده‌های نمایش داده شده مربوط به پرتابه‌ای با جرم  $0.478 \text{ kg}$  کیلوگرم، شعاع  $0.0115 \text{ m}$  متر و کالیبر شعاع سر  $3 \text{ mm}$  می‌باشد. مشاهده می‌شود که در حالت استفاده از ضریب اصطکاک ثابت، با در نظر گرفتن ضریب اصطکاک  $0.2$  عمق نفوذ حاصل از مدل در سرعت‌های پایین‌تر با داده‌های آزمایشگاهی تطابق خوبی را نشان می‌دهند و هر چه سرعت بالاتر می‌رود مدل، عمق نفوذ را پایین‌تر از داده‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن ضریب اصطکاک ثابت برابر با  $0.1$ ، مدل در سرعت‌های بالاتر تطابق خوبی را با داده‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد و هر چه سرعت برخورد پایین‌تر باشد، عمق نفوذ محاسبه شده با استفاده از مدل مقادیر بالاتری را نسبت به داده‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد. در حالت استفاده از مدل کاهش نمایی ضریب اصطکاک، مدل، هم در سرعت‌های پایین و هم در سرعت‌های بالا، تطابق خوبی با داده‌های آزمایشگاهی دارد. علت اختلاف نتایج به این صورت در ضرایب اصطکاک ثابت  $0.1$  و  $0.2$  ارتباط نیروی اصطکاک میان سطوح با سرعت لغزش می‌باشد. همان‌طور که ذکر شد، با افزایش سرعت نیروی اصطکاک میان سطوح کاهش می‌یابد. اما با در نظر گرفتن ضریب اصطکاک ثابت، این پدیده نادیده گرفته می‌شود. مدل استاتیکی-جنبشی کاهش نمایی (به اختصار مدل کاهش نمایی) این پدیده را به خوبی پوشش می‌دهد.

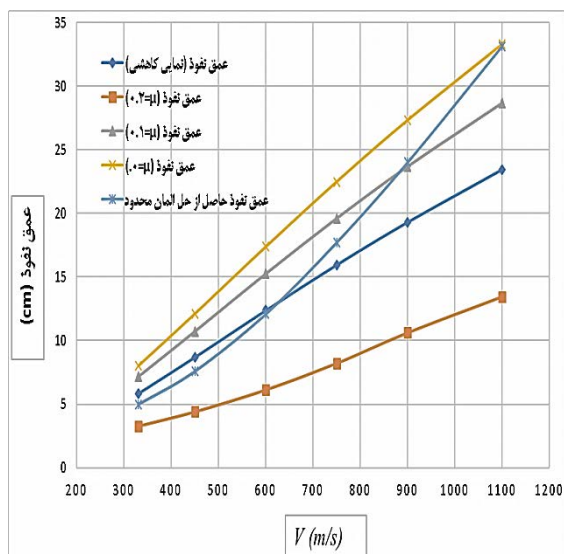


شکل (۱۸): حساسیت سنجی به اندازه المان بر حسب مقادیر نفوذ مربوط به دماغه دوپله در سرعت  $330 \text{ m/s}$

در شکل (۱۸)، خطای نسبی تحلیل المان محدود نمایش داده شده است. مقدار خطا از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$Error = \frac{D_2 - D_1}{D_2}$$

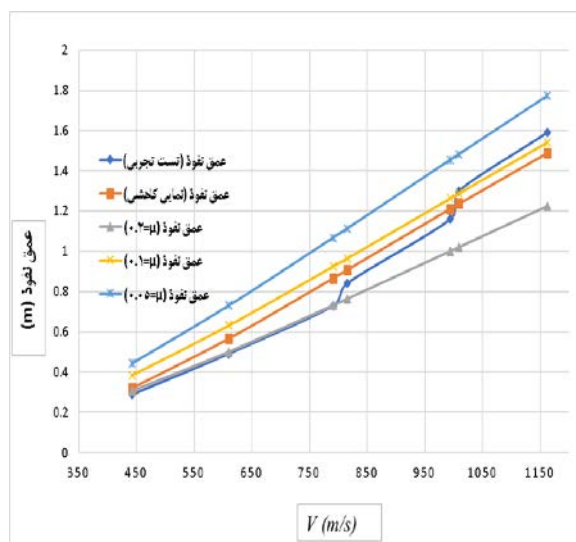
عمق نفوذ افزایش می‌یابد. برابر شکل (۲۱) مشاهده می‌گردد که در نظر گرفتن ضریب اصطکاک نمایی به جبران این واقعیت می‌پردازد.



شکل (۲۱): محاسبه عمق نفوذ در سرعت‌ها و اصطکاک‌های مختلف

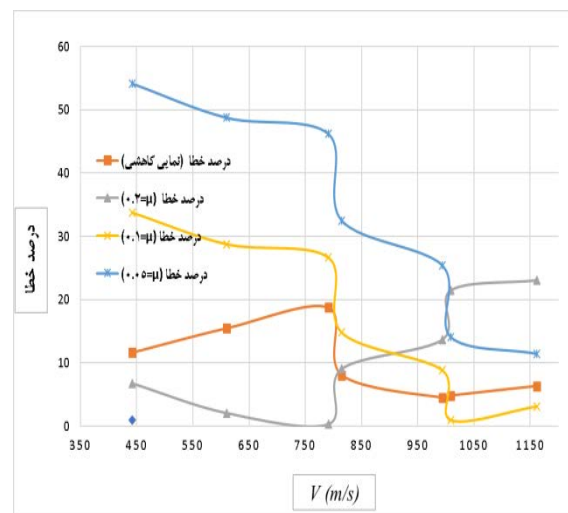
#### ۴- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر عمق نفوذ دماغه دویله با استفاده از حل المان محدود و حل عددی با استفاده از ضریب اصطکاک استاتیکی جنبشی کاهشی نمایی محاسبه شد. دماغه دو پله مذکور دارای نوک (پله اول) تخت یا مخروطی (بسته به نظر کاربر) است. پله دوم دماغه حالت اجایو دارد. معادلات مرتبط با این دو نوع دماغه ارتباط مرزی آن‌ها به‌دست آمده و در نهایت عمق نفوذ در سرعت‌ها و اصطکاک‌های مختلف به دو روش حل المان محدود و حل عددی محاسبه شد. در آن اصطکاک به‌صورت نمایی و استاتیکی از ضریب ۰ تا ۰/۲ در نظر گرفته شد و نتایج آن در شکل‌های (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) قابل مشاهده است. جهت مقایسه بازدهی مدل عمق نفوذ استفاده شده در مطالعه، عمق نفوذ چند نوع دماغه اجایو با کالیبرهای مختلف با استفاده از مدل مذکور در ضرایب اصطکاک ثابت و نمایی محاسبه و با داده‌های آزمایشگاهی موجود مقایسه شد. مشاهده گشت که عمق نفوذ محاسبه شده با استفاده از ضریب اصطکاک نمایی تطابق بهتری نسبت به حالت استفاده از ضرایب اصطکاک ثابت در یک طیف گسترده سرعت دارد. عمق نفوذ حاصل از حل عددی با ضریب اصطکاک نمایی پرتابه دویله نیز تطابق بهتری با داده‌های حاصل از حل المان محدود نسبت به حالت استفاده از ضریب اصطکاک ثابت دارد.



شکل (۱۹): عمق نفوذ دماغه اجایو به روش عددی در ضرایب اصطکاک‌های ثابت و مختلف، ضریب اصطکاک نمایی و آزمون تجربی [۳۱]

در شکل (۲۰) مقایسه درصد خطا با در نظر گرفتن ضرایب اصطکاک مختلف و ضریب اصطکاک نمایی نمایش داده شده است.



شکل (۲۰): مقایسه درصد خطا با در نظر گرفتن ضرایب اصطکاک مختلف و ضریب اصطکاک نمایی

در جدول (۵)، عمق نفوذ دماغه دویله حاصل از حل عددی در حالت صرف نظر از ضریب اصطکاک، با ضرایب اصطکاک ثابت ۰/۱، ۰/۲ و ضریب اصطکاک کاهشی نمایی و عمق نفوذ حاصل از حل المان محدود نمایش داده شده است. همچنین در این جدول سرعت‌های V1 و V2 آمده است. در شکل (۲۱) محاسبه عمق نفوذ در سرعت‌ها و اصطکاک‌های مختلف نمایش داده شده است.

با توجه به جدول (۴) می‌توان مشاهده نمود که ضریب اصطکاک در سرعت‌های پایین اثرات کمتری در میزان عمق نفوذ دارد و با بالا رفتن سرعت اثر ضریب اصطکاک در محاسبه میزان

جدول (۴): عمق نفوذ دماغه‌های اجابو حاصل از حل عددی و داده‌های آزمایشگاهی

fc (MPa)	شعاع ساقه (cm)	m Kg	V (m/s)	si	عمق نفوذ (آزمون تجربی)	عمق نفوذ (نمایی کاهشی)	Error %	عمق نفوذ ( $\mu=0/2$ )	Error %	عمق نفوذ ( $\mu=0/1$ )	Error %	عمق نفوذ ( $\mu=0/0.5$ )	Error %
۵۸/۴	۱/۰۱۵	۰/۴۷۸	۴۴۲	۳	۰/۲۸۷	۰/۳۲۰	۱۱/۶۴	۰/۳۰۶	۶/۷۶	۰/۳۸۴	۳۳/۷۶	۰/۴۴۳	۵۴/۱۸
۵۸/۴	۱/۰۱۵	۰/۴۷۸	۶۱۰	۳	۰/۴۹۱	۰/۵۶۷	۱۵/۵۰	۰/۵۰۱	۲/۰۸	۰/۶۳۲	۲۸/۷۸	۰/۷۳۱	۴۸/۷۸
۵۸/۴	۱/۰۱۵	۰/۴۷۸	۷۹۱	۳	۰/۷۳	۰/۸۶۷	۱۸/۷۸	۰/۷۳۲	۰/۳۳	۰/۹۲۵	۲۶/۶۶	۱/۰۶۸	۴۶/۲۳
۵۸/۴	۱/۰۱۵	۰/۴۷۸	۸۱۵	۳	۰/۸۴	۰/۹۰۸	۸/۰۷	۰/۷۶۴	۹/۰۶	۰/۹۶۴	۱۴/۸۰	۱/۱۱۳	۳۲/۵۱
۵۸/۴	۱/۰۱۵	۰/۴۷۸	۹۹۴	۳	۱/۱۶	۱/۲۱۲	۴/۴۸	۱/۰۰۱	۱۳/۶۸	۱/۲۶۲	۸/۸۳	۱/۴۵۵	۲۵/۴۱
۵۸/۴	۱/۰۱۵	۰/۴۷۸	۱۰۰۹	۳	۱/۳	۱/۲۳۷	۴/۸۳	۱/۰۲۱	۲۱/۴۴	۱/۲۸۷	۰/۹۷	۱/۴۸۳	۱۴/۱۰
۵۸/۴	۱/۰۱۵	۰/۴۷۸	۱۱۶۲	۳	۱/۵۹	۱/۴۸۹	۶/۳۵	۱/۲۲۴	۲۳/۰۳	۱/۵۴۰	۳/۱۳	۱/۷۷۲	۱۱/۴۵

جدول (۵): عمق نفوذ دماغه دوبله حاصل از حل عددی در ضرایب اصطکاک مختلف و عمق نفوذ حاصل از حل المان محدود

سرعت z (m/s) برخورد	V1(m/s)	V2(m/s)	عمق نفوذ حل عددی ( $\mu=0$ )	عمق نفوذ حل عددی ( $\mu=0/1$ )	عمق نفوذ حل عددی ( $\mu=0/2$ )	عمق نفوذ (اصطکاک نمایی کاهشی)	عمق نفوذ (المان محدود)
۳۳۰	۳۲۷/۴	۳۲۰	۸	۷/۱۴	۳/۲۸۱	۵/۸۵	۴/۹۸۱
۴۵۰	۴۴۷/۴	۴۳۹/۱	۱۲/۱۱	۱۰/۷۱	۴/۴۲	۸/۷۱	۷/۶
۶۰۰	۵۹۷/۱	۵۸۷/۵	۱۷/۳۷	۱۵/۲۴	۶/۱۳۵	۱۲/۳۸	۱۲/۱
۷۵۰	۷۴۶/۷	۷۳۵/۶	۲۲/۴۸	۱۹/۵۹	۸/۲۱۷	۱۵/۹۵۴	۱۷/۷۲
۹۰۰	۸۹۶/۳	۸۸۳/۷	۲۷/۳۱	۲۳/۶۶	۱۰/۶۱	۱۹/۳	۲۴/۰۱
۱۱۰۰	۱۰۹۵	۱۰۸۱	۳۳/۲۸	۲۸/۶۵	۱۳/۴۳۶	۲۳/۴۳	۳۳/۱۴

## ۵- مراجع

- [5] D. B. Longcope, "The Prediction of Loads on Penetrators into Rock via the Spherical Cavity Expansion Approximation," No. SAND87-0959; UC-705, p. 31, 1990.
- [6] M. J. Forrestal and D. Y. Tzou, "A Spherical Cavity-expansion Penetration Model for Concrete Targets," Pergamon PII, Vol. 35, No. 2, pp. 1681-1691, 1997,
- [7] M. J. Forrestal and v. K. Luk, "Penetration into Soil Targets," Int. J. Impact Eng., Vol. 12, No. 3, pp. 427-444, 1992
- [8] M. J. Forrestal, B. S. Altman, J. D. Cargile, and S. J. Hanchak, "An Empirical Equation for Penetration Depth of Ogive-nose Projectiles into Concrete Targets," Int. J. Impact Eng., Vol. 15, No. 4, pp. 395-405, 1994
- [9] X. W. Chen and Q. M. Li, "Deep Penetration of a Non-deformable Projectile with Different Geometrical Characteristics," Int. J. Impact Eng., Vol. 27, No. 6, pp. 619-637, 2002.
- [1] M. J. Forrestal and V. K. Luk, "Dynamic Spherical Cavity-expansion in a Compressible Elastic-plastic Solid," Am. Soc. Mech. Eng., Vol. 5, No. 88, pp. 1-5, 1988.
- [2] Y. D. Zhang, Z. C. Lu, and H. M. Wen, "On the Penetration of Semi-Infinite Concrete Targets by Ogival-nosed Projectiles at Different Velocities," Int. J. Impact Eng., Vol. 129, No. October 2018, pp. 128-140, 2019.
- [3] L. Yangyu, Q. Zhang, Y. Xue, X. Guo, Ch. Shang, W. Liu, S. Ren, and R. Long, "Hypervelocity Penetration of Concrete Targets with Long-rod Steel Projectiles: Experimental and Theoretical Analysis," Int. J. Impact Eng., Vol. 148, No. September 2020, p. 103742, 2021.
- [4] X. Zhang, H. Wu, S. Zhang, and F. L. Huang, "Projectile Penetration of Reinforced Concrete Considering the Effect of Steel Reinforcement: Experimental Study and Theoretical Analysis," Int. J. Impact Eng., Vol. 144, No. June, p. 103653, 2020.

- [21] D. J. Frew, M. J. Forrestal, and J. D. Cargile, "The Effect of Concrete Target Diameter on Projectile Deceleration and Penetration Depth," *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 32, No. 10, pp. 1584–1594, 2006.
- [22] M. J. Forrestal, v. K. Luk, Z. Rosenberg, and n. S. Brar, "Penetration of 7075-T651 Aluminum Targets with Ogival-nose Rods," *Int. J. Of Solids Struct.*, Vol. 29, No. 14, pp. 1729-1736, 1992.
- [23] M. J. Forrestal and A. J. Piekutowski, " *Int. J. Impact Eng.*, vol. 24, pp. 0734–0743, 2000.
- [24] G. Ben-Dor, A. Dubinsky, and T. Elperin, "Applied High-speed Plate Penetration Dynamics," Springer. Vol. 132. 2006.
- [25] D. Frew, S. Hanchak, M. Green, and M. Forrestal, "Penetration of Concrete Targets with Ogive-nose Steel Rods," *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 21, No. 6, pp. 489-497, 1998.
- [26] M. J. Forrestal, D. J. Frew, J. P. Hickerson, and T. A. Rohwer, "Penetration of Concrete Targets with Deceleration-time Measurements," *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 28, No. 5, pp. 479-497, 2003.
- [27] Z. Zenasni, S. Atlati, M. Haterbouch, Kinda Hannawi, W. P. Agbodgan, K. Nasri, R. Addou, and M. Zenazni, "Numerical Study of the Effect of concrete Cover and the Friction of Steel Concrete Interface," *MATEC Web Conf.*, Vol. 286, p. 02008, 2019.
- [28] Y. Chu, S. Min, and X. Chen, "Numerical Study of Inter-yarn Friction on the Failure of Fabrics upon Ballistic Impacts," *Mater. Des.*, Vol. 115, pp. 299–316, 2017.
- [29] Y. Peng, J. Q. Li, Y. Zhan, K. C. P. Wang, and G. Yang, "Finite Element Method-based Skid Resistance Simulation Using In-situ 3D Pavement Surface Texture and Friction Data," *Materials (Basel)*, Vol. 12, No. 23, pp. 7–9, 2019.
- [30] W. Choi and T. Kwon, "Variation of Kinetic Friction Coefficient with Respect to impact Velocity in Tube Type Energy Absorbers," In *Proc. of the 6th int. conf. on Applied Mathematics, Simulation, Modelling*, World Scientific and Engineering Academy and Society, 2012, pp. 30-37.
- [31] D. J. Frew, S. J. Hanchak, M. L. Green, and M. J. Forrestal, "Penetration of Concrete Targets with Ogiveose Steel Rods," *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 21, No. 6, pp. 489–497, 1998.
- [10] J. T. Gomez And A. Shukla, "Multiple Impact Penetration of Semi-infinite Concrete," *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 25, No. 10, pp. 965–979, 2001.
- [11] M. J. Forrestal, D. B. Longcope, and F. R. Norwood, "A Model to Estimate Forces on Conical Penetrators into Dry Porous Rock," *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, Vol. 48, No. 1, pp. 25–29, 1981.
- [12] Q. M. Li and X. W. Chen, "Dimensionless Formulae for Penetration Depth of Concrete Target Impacted by a Non-deformable Projectile," *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 28, No. 1, pp. 93–116, 2003
- [13] v. K. Luk, M. J. Forrestal, and D. E. Amos, "Dynamic Spherical Cavity Expansion of Strain-hardening Materials," *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, Vol. 58, No. 1, pp. 1–6, 1991.
- [14] M. J. Forrestal, n. S. Brar, and v. K. Luk, "Penetration of Strain-Hardening Targets With Rigid Spherical-Nose Rods," *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, Vol. 58, No. 1, pp. 7-10, 1991.
- [15] M. J. Forrestal, D. Y. Tzou, E. Askari, and D. B. Longcope, "Penetration into Ductile Metal Targets with Rigid Spherical-nose Rods," *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 16, No. 5–6, pp. 699–710, 1995.
- [16] v. K. Luk and M. J. Forrestal, "Penetration into Semi-infinite Reinforced-concrete Targets with Spherical and Ogival Nose Projectiles," *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 6, No. 4, pp. 291–301, 1987.
- [17] S. E. Jones and W. K. Rule, "On the Optimal Nose Geometry for a Rigid Penetrator, Including the Effects of Pressure-dependent Friction," *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 24, No. 4, pp. 403–415, 2000.
- [18] T. L. Warren and M. J. Forrestal, "Effects of Strain Hardening and Strain-rate Sensitivity on the Penetration of Aluminum Targets with Spherical-nosed Rods," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 35, No. 28–29, pp. 3737–3753, 1998.
- [19] M. J. Forrestal and v. K. Luk, "Dynamic Spherical Cavity-expansion in a Compressible Elastic-plastic Solid," *Am. Soc. Mech. Eng.*, Vol. 5, No. 88, pp. 1–5, 1988.
- [20] D. J. Frew, S. J. Hanchak, M. L. Green, and M. J. Forrestal, "Penetration of Concrete Targets with Ogive-nose Steel Rods," *Int. J. of Impact Eng.*, Vol. 21, No. 6, pp. 489–497, 1998.

# Analytical and numerical Study of the Penetration Depth of Double Nose Rigid Projectiles in Concrete Targets by Considering the Friction

A. Malekiyan\*, Kh. Vahedi, A. Naddaf Oskoyi, R. Hosseini

## Abstract

In this study the kinetic projectile with double nose in concrete targets by considering the velocity effect on friction between projectile and target is investigated. Numerical methods and finite element solution were used to calculate the depth of the penetration. In the numerical solution method, by integrating the stress at the nose surface and calculating the force on the nose of the penetrating projectile, the penetration depth of the projectile was calculated using Newton's second law and numerical methods were used to solve the resulting differential equations. In the finite element method, the Concrete damaged plasticity structural model was used to model the behavior of concrete, and in both the finite element method and the numerical solution method, the static-dynamic exponential reduction model is used to model the frictional force on the projectile. In order to develop the penetration depth equations, the parameters and equations related to the exponential friction coefficient have been considered and the two-step nose penetration depth equation has been developed by considering different parameters. To validate the proposed model, the results of experimental projectile penetration tests with the shape of the nose of other researchers have been used. Considering the effect of speed on the coefficient of friction between the projectile and the target has significantly increased the accuracy of speed calculations in this research.

**Key Words:** *Penetration Depth, Concrete Targets, Finite Element Method, Two-Step Nose, Friction*

---

\*Doctoral Student Mechanical Engineering Department, Imam Hossein University, Tehran, Iran.  
(pishro1404@chmail.ir) -Writer-in-Charge